

Développement : Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Référence : [ENS2] FRANCINO S., GIANELLA H., NICOLAS S., *Oraux X-ENS - Algèbre 2*, Cassini, 2009, p250.

Une étape ne se trouve pas dans la référence (je préfère l'argument que j'ai mis, qui se retrouve dans d'autres versions de ce développement sur [Agreg-Maths](#)).

Pour les leçons :

- 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications. (Ça passe mais il y a sans doute de meilleurs développements pour cette leçon)
- 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

On admettra les lemmes de notre choix pour la présentation (et/ou en montrer un ou les deux à la fin de l'oral, s'il y a le temps).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de ce développement est de trouver tous les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Lemme 1.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, de valeurs propres $\pm ik_1, \dots, \pm ik_r$ et éventuellement 0, avec $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$. Alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ (0) & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

où pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle θ . Autrement dit, e^{tA} est diagonalisable par blocs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où chaque bloc est une matrice de rotation ou bien la matrice identité.

PREUVE : Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 0, \dots, 0) P^{-1}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On a donc $e^{tA} = P \mathrm{diag}(e^{itk_1}, e^{-itk_1}, \dots, e^{itk_r}, e^{-itk_r}, 1, \dots, 1) P^{-1}$.

Soit $J = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On remarque que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = J R_\theta J^{-1}.$$

Soit Q_0 la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont constitués de r blocs J , avec le reste des coefficients diagonaux égaux à 1. On pose $Q_0 = PJ$, et $e^{tA} = Q_0 B Q_0^{-1}$, où B est la matrice par blocs définie dans l'énoncé du lemme.

Ici, on a $Q_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On écrit $Q_0 = Q_1 + iQ_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notons qu'elles ne sont pas forcément inversibles !).

On a $e^{tA} Q_0 = Q_0 B$, avec $e^{tA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (puisque A est réelle) et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\begin{cases} e^{tA} Q_1 = Q_1 B \\ e^{tA} Q_2 = Q_2 B \end{cases}$.

Le polynôme $P := \det(Q_1 + xQ_2)$ est non nul puisque $P(i) = \det(Q) \neq 0$, et donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. Autrement dit, $Q := Q_1 + xQ_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

En calculant $(L_1 + xL_2)$ dans le système précédent, on a alors $e^{tA} Q = QB$, ce qui achève la preuve en multipliant par Q^{-1} . $\square$

Lemme 2.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, M est diagonalisable si, et seulement si e^M est diagonalisable.

PREUVE : $\Rightarrow$) Immédiat, en diagonalisant M et par propriétés de l'exponentielle matricielle.

$\Leftarrow$) Supposons $\exp(M)$ diagonalisable. Comme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'après le théorème de décomposition de DUNFORD, il existe deux uniques polynômes en M $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec D diagonalisable, N nilpotente telles que $M = D + N$.

On a donc :

$$\begin{aligned} e^M &= e^{D+N} \\ &= e^N e^D \\ &= e^D + e^D(e^N - I_n). \end{aligned}$$

Comme D est diagonalisable, e^D aussi. De plus, $e^N - I_n$ est nilpotente (il suffit de trigonaliser N puis e^N pour voir que e^N n'a que 1 comme valeur propre, donc $\mathrm{Sp}(e^N - I_n) = \{0\}$).

Comme $e^N - I_n$ et e^D commutent, on en déduit que $e^D(e^N - I_n)$ est nilpotente.

e^D et $e^D(e^N - I_n)$ sont des polynômes en M , puisque D et N le sont et que l'exponentielle d'un polynôme en M est encore un polynôme en M . La décomposition de DUNFORD de e^M est donc $e^D + e^D(e^N - I_n)$.

Comme e^M est diagonalisable, $e^D(e^N - I_n) = 0$. En multipliant à gauche par e^{-D} , on obtient $e^N = I_n$.

Or, $e^N = I_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^n}{n!} = I_n + N(I_n + N')$ avec N' nilpotente. Donc $N(I_n + N') = 0$, et on sait que $I_n + N'$ est inversible (car $\det(I_n + N') = \chi_{-N'}(1) \neq 0$: $-N'$ est nilpotente), donc $N = 0$, et $M = D$ est diagonalisable. $\square$

Théorème 3. Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Les morphismes de groupes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les morphismes φ définis par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

où $k_1, \dots, k_r$ parcourent $\mathbb{Z}^*$ et Q parcourt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

PREUVE : Soit $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Raisonnons par étapes pour montrer que φ est de la forme souhaitée.

* ÉTAPE 1 : Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrons que $\det(\varphi(z)) = 1$.

Posons $\psi = \det \circ \varphi$. ψ est un morphisme de groupes continu par composée de morphismes de groupes continus.

Comme $\mathbb{U}$ est connexe, $\psi(\mathbb{U})$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

ψ ne s'annule pas, puisque $\varphi(z)$ est inversible : φ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\psi(1) = 1$, il vient alors que $\psi(\mathbb{U})$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$. C'est également un segment puisque $\mathbb{U}$ est compact et que ψ est continue.

Comme ψ est un morphisme de groupes, $\psi(\mathbb{U})$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. Le seul sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ borné est $\{1\}$ (en effet, dans le cas contraire, si G est un tel groupe, il existe $a \in G$ tel que $a > 1$ quitte à prendre son inverse, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in G$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, ce qui contredit le fait que G soit borné).

Par conséquent, $\psi(\mathbb{U}) = \{1\}$, ce qui donne $\det(\varphi(z)) = 1$.

* ÉTAPE 2 : Montrons que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{Sp}(\varphi(z)) \subset \mathbb{U}$.

Soit $\|\cdot\|$ une norme triple sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{U}$ est compact et φ est continu, $\varphi(\mathbb{U})$ est compact donc borné. Ainsi :

$$\exists M > 0 \quad \forall z \in \mathbb{U} \quad \|\varphi(z)\| < M.$$

Maintenant, soient $z \in \mathbb{U}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(z))$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, λ^p est donc valeur propre de $\varphi(z)^p = \varphi(z^p) \in \varphi(\mathbb{U})$.

Donc $(\lambda^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, ce qui prouve que $\lambda \in \mathbb{U}$.

* ÉTAPE 3 : Soit $\Phi : t \mapsto \varphi(e^{it})$ (à valeurs réelles). Montrons que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = e^{tA}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $F : x \mapsto \int_0^x \Phi(t) dt$. Comme Φ est continue (par composition d'applications continues) sur $\mathbb{R}$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F'(0) = \Phi(0) = I_n$.

Donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t} = I_n$ (taux d'accroissement de F en 0).

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert, pour t assez petit, $\frac{F(t)}{t}$ est inversible, donc $F(t)$ aussi. Soit $a > 0$ tel que $F(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Φ étant un morphisme de groupes, pour tout $x, t \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(x+t) = \Phi(x)\Phi(t)$. En intégrant par rapport à t sur $[0, a]$, il vient :

$$\int_0^a \Phi(x+t) dt = \Phi(x) \int_0^a \Phi(t) dt,$$

i.e. :

$$\Phi(x) = \int_0^a \Phi(x+t) dt F(a)^{-1}.$$

Or, comme Φ est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \Phi(x+t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (il suffit de faire un changement de variable affine et de séparer les intégrales comme il faut, avec les relations de CHASLES). Donc Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soient $x, t \in \mathbb{R}$. En dérivant l'égalité $\Phi(x+t) = \Phi(x)\Phi(t)$ par rapport à t , on obtient :

$$\Phi'(x+t) = \Phi(x)\Phi'(t).$$

Pour $t = 0$, $\Phi'(x) = \Phi'(0)\Phi(x)$, et en posant $A = \Phi'(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient le résultat escompté.

★ ÉTAPE 4 : Concluons. Par construction, Φ est périodique de période 2π , donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = e^{2\pi A} e^{tA}.$$

Donc $e^{2\pi A} = I_n$ est diagonalisable. D'après le lemme 2, $2\pi A$ (donc A) est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{Z}$. A est une matrice réelle avec $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{Z}$, donc ses valeurs propres non nulles sont deux à deux conjuguées. On note $\pm ik_1, \dots, \pm ik_r$ les valeurs propres non nulles de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le lemme 1, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(e^{it}) = e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Réciproquement, soient $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$, ainsi que $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(e^{it}) = Q \underbrace{\begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}}_{:=B_t} Q^{-1},$$

$\rightarrow \varphi$ est bien définie car pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $t \mapsto R_{tk_i}$ est au moins 2π -périodique.

$\rightarrow \varphi$ morphisme de groupes car pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1}R_{\theta_2}$.

$\rightarrow \varphi$ est une application continue. En effet, soient $t, t' \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|e^{ikt} - e^{ikt'}| \leq |k| |e^{-it} - e^{-it'}|.$$

Donc $|\cos(kt) - \cos(kt')| \leq |k| |e^{it} - e^{it'}|$ et $|\sin(kt) - \sin(kt')| \leq |k| |e^{it} - e^{it'}|$.

Par conséquent, pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\|R_{tk_i} - R_{t'k_i}\|_\infty \leq |k_i| |e^{it} - e^{it'}|$, et en notant $k = 1 + \max_{i=1}^r |k_i|$:

$$\|B_t - B_{t'}\|_\infty \leq k |e^{it} - e^{it'}|.$$

$t \mapsto e^{it}$ étant continue, $t \mapsto B_t$ est continue. Par composée avec l'application $M \mapsto QMQ^{-1}$ (qui est continue car linéaire en dimension finie), on en déduit que $t \mapsto \varphi(e^{it})$ (c'est-à-dire φ) est continue. Cela achève la preuve. $\square$

Remarque 4. Que se passe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Un exercice associé est disponible dans la référence, juste avant le théorème qui vient d'être démontré.

Dès l'ÉTAPE 1, rien ne marche, parce qu'on a utilisé que $\mathbb{R}^*$ n'était pas connexe, a contrario de $\mathbb{R}_+^*$. Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de résultat analogue : $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe (par arcs)...

Tout d'abord, on montre que les morphismes continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ sont les applications de la forme $z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour cela, il nous faut déterminer les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, qui sont les $t \mapsto e^{tz}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Ensuite, on montre que les morphismes de groupe continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ sont les applications de la forme $z \mapsto P \mathrm{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}) P^{-1}$, où $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Pour des arguments plus précis et des vraies preuves, cf. la référence, pages 248 à 250. C'est (un peu) long, donc je ne le détaille pas ici.